

Un metodo per caratterizzare i circuiti risonanti parallelo (14-09-2015)

1. Aspetti teorici

Lo schema di un circuito risonante parallelo ad elementi concentrati, ricavato dai circuiti equivalenti dell'induttore e del condensatore che lo compongono, è rappresentato in **Fig.1**.

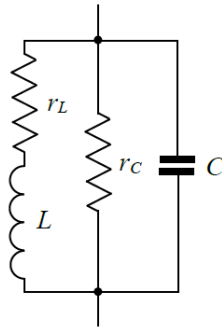


Fig.1 – Schema di un circuito risonante parallelo ricavato dagli schemi equivalenti dell'induttore e del condensatore che lo compongono.

Con r_L ed r_C sono state indicate rispettivamente le resistenze di perdita dell'induttore e del condensatore. In prima approssimazione con r_L è indicata la resistenza del conduttore che forma l'induttore e con r_C sono indicate le perdite del dielettrico e sulle armature del condensatore. (In realtà alle frequenze più alte lo schema è più complesso perché è necessario considerare anche le capacità fra spira e spira dell'induttore L e l'induttanza dei reofori del condensatore C , se presenti. Tenendo conto anche di questi elementi parassiti, si trova che il circuito risonante può presentare più frequenze di risonanza, sia di tipo serie che parallelo). Alla risonanza un circuito risonante parallelo può essere schematizzato come in **Fig.2**.

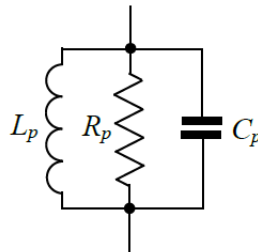


Fig.2 – Schema equivalente di un circuito risonante parallelo alla risonanza.

Per ricavare dal circuito di **Fig.1** il valore degli elementi che compongono il circuito di **Fig.2** occorre trasformare la serie r_L - L nel circuito equivalente parallelo, come è indicato in **Fig.3**.

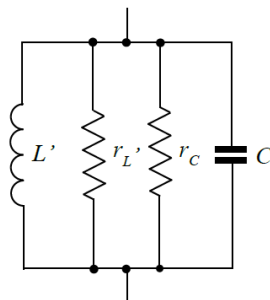


Fig.3 – Schema di **Fig.1** con la serie r_L - L trasformata in parallelo.

Le formule di trasformazione sono:

$$r_L' = \frac{r_L^2 + X_L^2}{r_L} \cong \frac{X_L^2}{r_L} \quad (1) \quad X_{L'} = \frac{r_L^2 + X_L^2}{X_L} \cong X_L \quad (2)$$

Le semplificazioni sono quasi sempre possibili in quanto generalmente è $r_L \ll X_L$.

Confrontando lo schema di **Fig.3** con quello di **Fig.2** risulta:

- L_p uguale ad L' e, nei limiti di validità della semplificazione precedente, ad L ;
- $C_p = C$;
- R_p uguale al parallelo di r_L' ed r_C .

La resistenza r_L' dipende dalla frequenza perché X_L ed r_L dipendono dalla frequenza (r_L per l'effetto pelle [3]), quindi R_p , se non altro attraverso r_L' , dipende dalla frequenza.

Un circuito come quello di **Fig.2** è completamente caratterizzato quando sono noti i seguenti parametri: f_0 , Q e R_p .

La frequenza di risonanza f_0 ed il fattore di bontà Q sono dati da:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_p C_p}} \quad (3) \quad Q = \frac{R_p}{\omega_0 L_p} = R_p \omega_0 C_p \quad (4)$$

La resistenza di perdita R_p è legata agli altri elementi del circuito dalle formule che danno f_0 e Q , per cui è possibile risalire ad R_p noto f_0 oppure Q ed un altro elemento del circuito come L_p o C_p .

In **Fig.4** è rappresentato un circuito risonante parallelo come quello di **Fig.2** alimentato da un generatore di corrente ideale a frequenza variabile e chiuso su uno strumento ad alta impedenza d'ingresso in grado di misurare, in una banda di frequenze comprendente la frequenza di risonanza, l'ampiezza della tensione sinusoidale presente ai morsetti del circuito. L'impedenza dello strumento (indicato nello schema come voltmetro) sia molto maggiore della resistenza di perdita R_p del circuito risonante e priva di parte reattiva in modo da non alterare la frequenza di risonanza propria del circuito sotto misura.

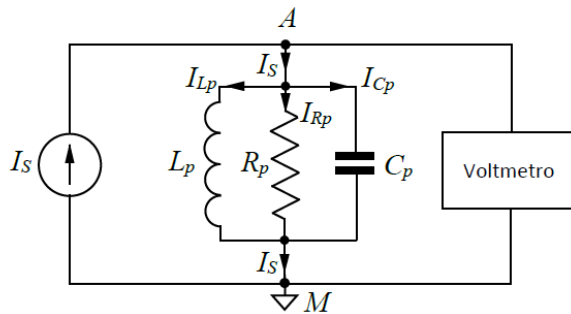


Fig.4 – Schema di principio di un set-up per la misura della frequenza di risonanza e del fattore di bontà di un circuito risonante parallelo.

Variando la frequenza della corrente I_S fornita dal generatore, l'ampiezza della tensione letta dallo strumento varia fino a raggiungere un massimo che si ha in corrispondenza della frequenza di risonanza.

Come è mostrato nel diagramma vettoriale di **Fig.5**, alla risonanza:

- la corrente I_S fornita dal generatore e la tensione V_{AM} ai capi del circuito sono in fase;

- le correnti I_{Lp} , I_{Cp} che scorrono in L_p e in C_p hanno la stessa ampiezza, sono in quadratura con la tensione V_{AM} ai capi del circuito, ed in controfase fra loro;
- la corrente I_{Rp} che scorre in R_p è uguale alla corrente I_S fornita dal generatore;
- il rapporto fra l'ampiezza delle correnti I_{Lp} e I_{Cp} che scorrono in L_p e in C_p e quella della corrente I_{Rp} che scorre in R_p è uguale al fattore di bontà Q (per come è definito Q). In un circuito risonante a basse perdite il valore di Q è elevato per cui le ampiezze delle correnti I_{Lp} e I_{Cp} risultano molto maggiori di quella della corrente I_S fornita dal generatore.

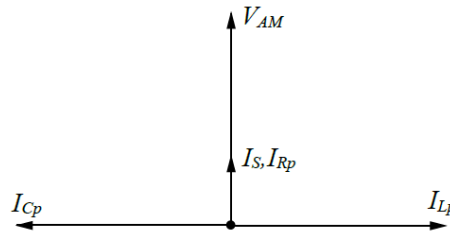


Fig.5 – Diagramma vettoriale delle grandezze elettriche che interessano il circuito alla risonanza.

Alla frequenza di risonanza il circuito si presenta al generatore come puramente resistivo, a frequenze minori come ohmico-induttivo (tensione V_{AM} sfasata in anticipo sulla corrente I_S) e a frequenze maggiori come ohmico-capacitivo (tensione V_{AM} sfasata in ritardo sulla corrente I_S).

Esprimendo V_{AM} in funzione degli elementi del circuito e della pulsazione $\omega = 2\pi f$, imponendo la condizione $V_{AM}(\omega)/V_{AM}(\omega_0) = 1/\sqrt{2}$ si trovano le due soluzioni:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \sqrt{1 \mp \frac{1}{Q}} \cong \omega_0 \left(1 \mp \frac{1}{2Q}\right)$$

Dall'espressione approssimata, valida quanto più elevato è il valore di Q , si ricava:

$$Q = \frac{\omega_0}{(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{f_0}{(f_2 - f_1)}$$

che consente di calcolare il Q nota la frequenza di risonanza f_0 e le frequenze f_2 ed f_1 (f_2 maggiore, f_1 minore di f_0) in corrispondenza delle quali la tensione di uscita si riduce di $\sqrt{2}$ e la potenza alla metà. Il rapporto f_0/Q rappresenta la banda a 3dB (B_{3dB}) del circuito risonante.

Il modo più immediato per risalire ad R_p è quello di collegare in parallelo al circuito risonante una resistenza R nota in modo da abbassarne il fattore di bontà da Q a Q' . Tenendo conto che con la presenza di R la resistenza in parallelo ad L_p e C_p risulta uguale al parallelo delle resistenze R_p ed R , per ricavare R_p dalle misure di Q e Q' si trova l'espressione:

$$R_p = R \left(\frac{Q}{Q'} - 1 \right)$$

La resistenza R deve essere priva di componenti parassite in modo da non alterare la frequenza di risonanza propria del circuito risonante e dello stesso ordine di grandezza di R_p . In condizioni di basse perdite il valore di R_p è elevato e disporre di resistenze di valore elevato prive di reattanze parassite alle alte frequenze non è facile.

Le misure descritte presuppongono l'uso di un set-up di misura a cui corrisponda lo schema di principio rappresentato in **Fig.4**. Alle alte frequenze la quasi totalità dei generatori di segnale hanno impedenze di uscita uguali a 50Ω . In questo caso il generatore di corrente può essere implementato ponendo in serie all'uscita del generatore una resistenza o un'impedenza di valore elevato in modo che la corrente fornita al carico esterno sia indipendente dal valore della sua impedenza. Sempre con riferimento allo schema di **Fig.4**, al posto del voltmetro, per la misura della tensione ai morsetti del circuito risonante può essere utilizzato:

1. un oscilloscopio per alte frequenze, purché abbia, se è collegato direttamente al circuito sotto misura, una banda tale che comprenda le frequenze di misura ed una impedenza di ingresso elevata e priva di componenti reattive. Il segnale visualizzato sull'oscilloscopio è una sinusoide, la grandezza misurata è una tensione.
2. Un oscilloscopio per basse frequenze preceduto da un rivelatore d'ampiezza. L'impedenza presentata dal rivelatore al circuito sotto misura deve essere elevata e priva di componenti parassite. Il segnale inviato all'oscilloscopio è una tensione continua, la grandezza misurata è una tensione.
3. Un bolometro. In questo caso l'impedenza d'ingresso dello strumento è 50Ω , per cui, per ricadere nelle condizioni ideali di **Fig.4**, è necessario disaccoppiare lo strumento dal circuito sotto misura. In questo caso la grandezza misurata è una potenza.
4. Un analizzatore di spettro. Valgono le stesse considerazioni del caso precedente.

Se al posto del voltmetro di **Fig.4** è utilizzato un rivelatore di inviluppo e un oscilloscopio (come indicato al punto 2) ed inoltre il generatore consente la scansione automatica della frequenza, sincronizzando generatore e oscilloscopio è possibile visualizzare sullo schermo dell'oscilloscopio la curva di risposta in frequenza del circuito risonante. La stessa visualizzazione è possibile con un analizzatore di spettro con memoria.

In **Fig.6** è rappresentato lo schema di un set-up di misura (a cui si fa cenno anche in [1] Chapter 5, para 5.3.11) fra i più usati per le misure su circuiti risonanti parallelo alle alte frequenze.

Il set-up di **Fig.6** usa un generatore di segnale con impedenza d'uscita R_S uguale a 50Ω ed uno strumento per la misura del livello ai morsetti del circuito risonante con impedenza di ingresso R_L anch'essa uguale a 50Ω , disaccoppiati dal circuito sotto misura mediante due condensatori di capacità C_a .

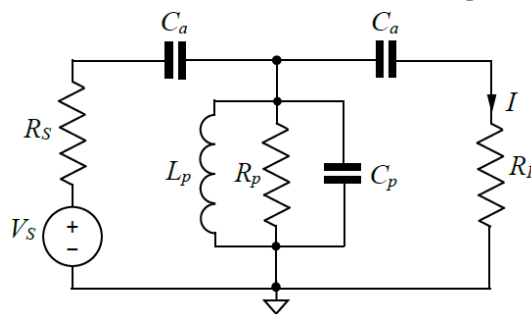


Fig.6 – Schema di un set-up di misura con generatore e misuratore di livello disaccoppiati dal circuito risonante mediante due condensatori di capacità C_a .

Che R_L sia uguale a 50Ω non significa che lo strumento usato sia un bolometro o un analizzatore di spettro, potrebbe essere anche un oscilloscopio per alte frequenze, impostato per una impedenza d'ingresso di 50Ω , o un oscilloscopio per basse frequenze preceduto da un rivelatore con l'ingresso RF chiuso verso massa con una resistenza ideale da 50Ω .

In questi due ultimi casi il livello misurato è proporzionale alla corrente I indicata in figura perché è una tensione, invece se si usa un bolometro o un analizzatore di spettro il livello misurato è proporzionale al quadrato di I perché è una potenza.

Trasformando il generatore di tensione dello schema di **Fig.6** in generatore di corrente, ne risulta lo schema rappresentato in **Fig.7**.

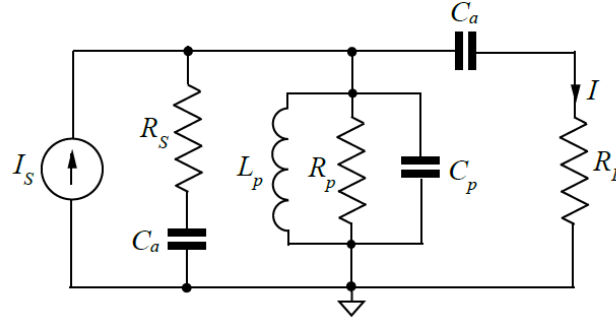


Fig.7 – Schema ottenuto dal precedente trasformando il generatore di tensione in generatore di corrente.

La corrente I_S fornita dal generatore di corrente si ricava con il teorema di Norton [2] e in modulo vale:

$$I_S = \frac{\omega C_a V_S}{\sqrt{1 + (\omega R_S C_a)^2}} \quad (5)$$

I due gruppi RC serie dello schema di **Fig.7** possono essere trasformati in RC parallelo come nello schema di **Fig.8**.

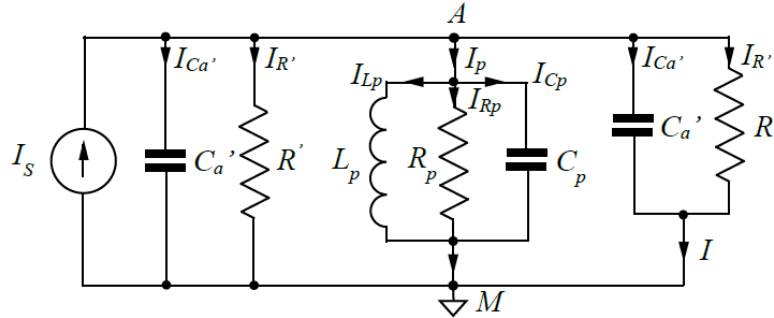


Fig.8 – Schema ottenuto trasformando i due gruppi RC serie di **Fig.7** in RC parallelo.

La resistenza R' e la reattanza $X_{C_a'}$ sono date da:

$$R' = \frac{R_{S,L}^2 + X_{C_a}^2}{R_{S,L}} \cong \frac{X_{C_a}^2}{R_{S,L}} \quad (6) \quad X_{C_a'} = \frac{R_{S,L}^2 + X_{C_a}^2}{X_{C_a}} \cong X_{C_a} \quad (7)$$

Le semplificazioni sono possibili se $R_{S,L} \ll X_{C_a}$. La resistenza R' dipende dalla frequenza attraverso X_{C_a} .

Il circuito di **Fig.8** è composto da elementi R, L, C in parallelo che in sinesis costituiscono un circuito risonante parallelo come quello rappresentato in **Fig.2** con frequenza di risonanza f_0' e fattore di bontà Q' dati da:

$$f_0' = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_p (C_p + 2C_a')}} \quad (8) \quad Q' = \frac{R_p(f_0') R'(f_0')}{[2R_p(f_0') + R'(f_0')] \omega_0' L_p} = \frac{R_p(f_0') R'(f_0') \omega_0' (C_p + 2C_a')}{[2R_p(f_0') + R'(f_0')]} \quad (9)$$

In **Fig.9** è rappresentato il diagramma vettoriale delle correnti che interessano il circuito di **Fig.8**. I vettori I_R, I_L e I_C rappresentano le correnti che interessano la resistenza, l'induttanza e la capacità equivalenti ai

corrispondenti elementi posti in parallelo. Notare che i vettori che rappresentano le correnti I_L e I_C sono stati disegnati interrotti per l'impossibilità di mantenere nel diagramma la proporzionalità con gli altri vettori, visto che andrebbero disegnati Q' volte più lunghi del vettore che rappresenta I_R .

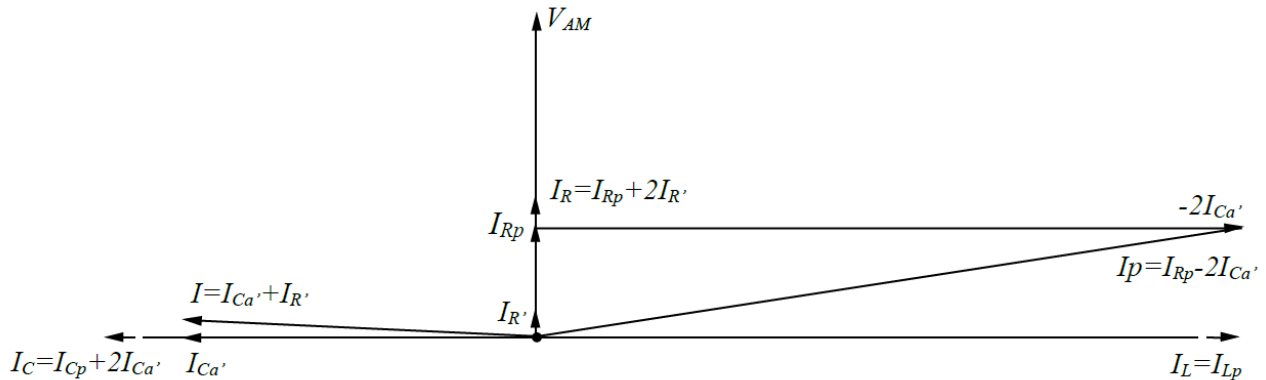


Fig.9 – Diagramma vettoriale delle correnti che interessano il circuito di **Fig.8**.

Il metodo descritto è affetto da un errore sistematico che fa sì che i valori misurati f_0' e Q' differiscano dai valori f_0 e Q del circuito sotto misura.

Con riferimento allo schema di **Fig.8**, gli errori saranno tanto più piccoli quanto più nel parallelo è trascurabile la presenza di R' e di C_a' , quindi, come si desume dalle (6) e (7), quanto più piccola è la capacità C_a .

Non sempre però è possibile ridurre C_a ad un valore che consente di ottenere un errore accettabile perché riducendo C_a si riduce l'ampiezza della corrente che interessa lo strumento per la misura del livello di segnale ai morsetti del circuito risonante, ampiezza che non può scendere al di sotto della sensibilità dello strumento stesso.

Se riducendo C_a non è possibile ridurre gli errori sistematici al di sotto di un valore prestabilito e allo stesso tempo rimanere nel campo di sensibilità dello strumento è necessario correggere gli errori sistematici su f_0 e Q mediante formule di correzione che è possibile ricavare confrontando le espressioni (3) e (8) di f_0 ed f_0' , per la frequenza di risonanza e confrontando le espressioni (4) e (9) di Q e Q' , per il fattore di bontà ed eliminando, in entrambi i casi, il termine che rappresenta l'induttanza L_p . Le formule a cui si perviene e che consentono di ricavare f_0 e Q da f_0' e Q' sono le seguenti:

$$f_0 = f_0' \sqrt{1 + \frac{2C_a'(f_0')}{C_p}} \quad (10)$$

$$Q = Q' \frac{f_0' R_p(f_0)}{f_0 R_p(f_0')} \left[1 + \frac{2R_p(f_0')}{R'(f_0')} \right] \quad (11)$$

Le due formule contengono grandezze che potrebbero essere non note a priori, in particolare:

- Per applicare la formula che fornisce f_0 è necessario conoscere $C_a'(f_0')$ e C_p . Al valore esatto di $C_a'(f_0')$ è possibile risalire dalla (7) nella forma completa e dalla frequenza f_0' misurata. Per bassi valori della capacità C_a è valida la (7) nella forma approssimata per cui $C_a'(f_0') = C_a$. A C_p , se non è noto a priori, è possibile risalire da f_0' , Q' e dal parallelo di $R_p(f_0')$ con le due resistenze $R'(f_0')$. La resistenza parallelo può essere determinata con il metodo della variazione del Q provocata dall'inserzione di una resistenza nota in parallelo al circuito sotto misura.
- Per applicare la seconda formula è necessario conoscere $R_p(f_0)$, $R_p(f_0')$ ed $R'(f_0')$. Per determinare $R'(f_0')$ può essere usata la (6). Ad $R_p(f_0')$ è possibile risalire dal parallelo di $R_p(f_0')$ con le due resistenze $R'(f_0')$, ricavato per via sperimentale con il metodo della variazione del Q descritta sopra. Ad $R_p(f_0)$ non è possibile risalire per via sperimentale. Una stima può essere ottenuta per via teorica, con ipotesi semplificative, nota

la struttura del circuito di partenza. Un modo per superare questa difficoltà è quella di considerare $R_p(f_0') = R_p(f_0)$. Questa approssimazione è giustificata dal fatto che le due resistenze differiscono solo per la frequenza a cui sono calcolate le perdite del circuito sotto misura. L'approssimazione è tanto più valida quanto più le due frequenze sono vicine e quindi quanto più bassa è la capacità C_a .

2. Esempio numerico

Per avere un'idea del valore delle grandezze in gioco consideriamo il caso di un circuito risonante parallelo costituito da una capacità $C=10\text{pF}$ con perdite trascurabili e da una induttanza L costituita da $N=3,5$ spire di filo AWG-12 di rame argentato avvolto in aria su un diametro $D=12,7\text{mm}$. In base alle considerazioni svolte sopra, ci proponiamo di calcolare:

- a) la frequenza di risonanza f_0 ed il fattore di bontà Q del circuito;
- b) la frequenza di risonanza f_0' ed il fattore di bontà Q' dello stesso circuito misurati in un set-up di misura come quello di **Fig.6** con $C_a = 0,5\text{pF}$;
- c) le correnti che interessano il circuito e la potenza letta da un bolometro usato per misurare il livello di segnale ai morsetti del circuito risonante nell'ipotesi che il generatore sia in grado di erogare una potenza disponibile di 10dBm .

a) Dal grafico A di Fig. 2-74 di [1], che fornisce l'induttanza al variare del numero N di spire di un induttore realizzato con filo AWG-12 avvolto con un passo di 8 spire/pollice su un diametro di 1/2 pollice, si trova che ad $N=3,5$ spire corrisponde un'induttanza di 150nH , compresi i reofori lunghi 1/2 pollice. Come induttanza L consideriamo questo valore.

La lunghezza del filo avvolto risulta $l=\pi(D+d)N=16,16\text{cm}$. Aggiungendo la lunghezza dei reofori si trova una lunghezza totale di $16,7\text{cm}$. Per calcolare la resistenza r_L tenendo conto dell'effetto pelle occorre conoscere la frequenza di risonanza f_0 . Per calcolare f_0 facciamo l'ipotesi, da verificare a posteriori, che siano valide le condizioni per la semplificazione della (2). Se è valida questa ipotesi $L_p = L$ e poiché $C_p = C$, risulta:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 129,95 \text{ MHz}$$

La resistenza r_L comprensiva dell'effetto pelle è data da:

$$r_L = \frac{2l}{d} \sqrt{\frac{\rho(\Omega m) f(\text{MHz})}{10}} = 0,085284 \Omega \quad (12)$$

per la resistività ρ è stato considerato il valore $1,6 \cdot 10^{-8} \Omega m$ relativo all'argento. Dai valori trovati risulta che le condizioni per la semplificazione della (2) sono soddisfatte, come ipotizzato.

Dalla (1) si trova $r_L' = 175,882 \text{ K}\Omega$. Poiché le perdite del condensatore sono trascurabili R_p è uguale ad r_L' per cui risulta:

$$Q = \frac{R_p}{\omega_0 L_p} = 1436,07$$

Valore elevato, difficile da ottenere in pratica perché nella realizzazione del circuito risonante la resistenza R_p è destinata a diminuire per effetto delle perdite presentate ad esempio dai supporti su cui sono montati l'induttore e il condensatore. Ad un Q così elevato corrisponde una banda a 3dB pari a $B_{3dB} = f_0/Q = 90,49 \text{ KHz}$.

b) Per calcolare la frequenza di risonanza f_0' facciamo l'ipotesi che siano valide le condizioni per la semplificazione della (7). Se è valida questa ipotesi $C_a' = C_a$ e $C_p' = C_p + 2C_a' = C + 2C_a$.

$$f_0' = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + 2C_a)}} = 123,90 \text{ MHz}$$

Dal confronto della reattanza X_{Ca} , calcolata a questa frequenza, con 50Ω , valore di $R_{S,L}$, è facile verificare che le condizioni per la semplificazione della (7) sono soddisfatte.

Per calcolare il Q' occorre determinare R_p ed R' alla frequenza f_0' .

Alla frequenza f_0' dalla (12) si ricava $r_L=0,083275\Omega$ e dalla (1) $r_L'=163,748K\Omega$. Poiché è stata fatta l'ipotesi che le perdite del condensatore del circuito risonante siano trascurabili, è $R_p = r_L' = 163,748K\Omega$. Per R' dalla (6) si trova $R' = 132,050K\Omega$. In definitiva, con i valori trovati per le resistenze il fattore di bontà risulta:

$$Q' = \frac{R_p(f_0')R'(f_0')}{[2R_p(f_0') + R'(f_0')]\omega_0' L_p} = 402,94$$

Valore molto minore rispetto a quello del fattore di bontà del circuito risonante sotto misura.

c) L'ampiezza della corrente I_S fornita dal generatore del circuito di **Fig.7** è data dalla (5), calcolata alla frequenza f_0' . La tensione V_S rappresenta la tensione a vuoto all'uscita del generatore ed è data da $V_S = \sqrt{4P_{avs}R_S}$ con P_{avs} potenza disponibile dal generatore. Nella tabella che segue sono riassunti i valori assunti dalle grandezze elettriche del circuito di **Fig.8** ottenuti risolvendo il circuito per una potenza disponibile del generatore $P_{avs} = 10\text{dBm}$.

Grandezza	Descrizione	Valore	U.M.
P_{avs}	Potenza disponibile dal generatore	10	dBm
		10	mW
V_S	Tensione a vuoto del generatore	1,414	Volt
$ I_S $	Ampiezza della corrente I_S	0,550	mA
V_{AM}	Tensione ai capi del circuito alla risonanza	25,897	Volt
I_{Rp}	Corrente nella resistenza R_p	0,158	mA
$I_{R'}$	Corrente in ciascuna delle due resistenze R'	0,196	mA
I_{Lp}	Corrente nell'induttore L_p	221,767	mA
X_{Cp}	Reattanza di C_p alla frequenza f_0'	128,452	Ω
I_{Cp}	Corrente nella capacità C_p	201,606	mA
$I_{Ca'}$	Corrente in ciascuna delle due capacità $C_{a'}$	10,080	mA
I	Corrente che scorre in R_L e che determina la potenza misurata dal bolometro	10,082	mA
V_L	Tensione ai capi di R_L	504,1	mV
P_L	Potenza inviata al bolometro	5,083	mW
		7,061	dBm

Tab.1 – Valori assunti dalle grandezze elettriche del circuito di Fig.8 per una potenza disponibile del generatore di 10dBm.

Alla risonanza la tensione V_{AM} è data dal prodotto di I_S per il parallelo delle resistenze R_p , R' ed ancora R' . Nota V_{AM} è immediato calcolare le correnti negli elementi reattivi. Come si vede dai valori di tabella, per effetto della risonanza e del Q (uguale a 402,94 in questo caso) le correnti negli elementi reattivi sono piuttosto elevate,

rispetto alla corrente I_s di alimentazione del circuito. La corrente I che, a meno del piccolo contributo dovuto alla corrente che scorre in R' , determina la potenza misurata dal bolometro è una parte proporzionale al valore di C_a della corrente che scorre nelle capacità.

Nelle figure che seguono sono riportati per il caso in esame i grafici che mostrano l'andamento l'errore percentuale previsto nella misura di f_0 e del Q ed il grafico con l'andamento della potenza inviata al bolometro al variare della capacità C_a .

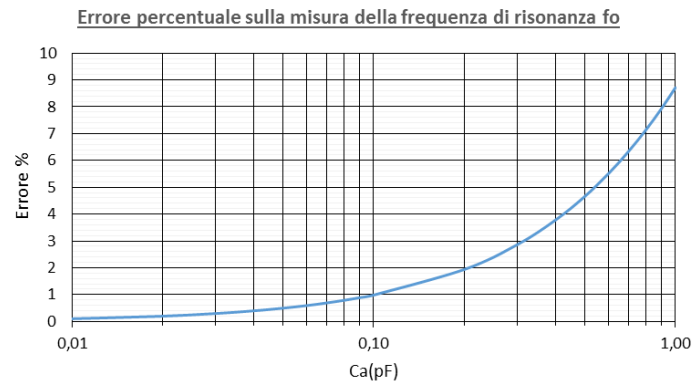


Fig.10 – Andamento dell'errore percentuale nella misura della frequenza di risonanza f_0 al variare della capacità C_a .

L'errore che si commette nella misura della frequenza di risonanza (**Fig.10**) è abbastanza contenuto e volendo può essere facilmente corretto mediante la (10).

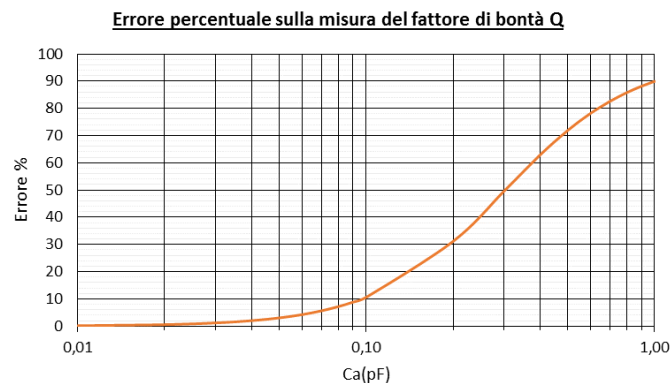


Fig.11 – Andamento dell'errore percentuale nella misura del fattore di bontà Q al variare della capacità C_a .

La variazione dell'errore sulla misura del Q al variare della capacità C_a è alta per le variazioni della resistenza R' , che dipende in modo diretto da $X_{C_a}^2$ secondo la (6). L'errore può ritenersi nullo solo per $R' \gg R_p$, quindi per valori molto bassi della capacità C_a , come è mostrato in **Fig.11**. Nel caso in esame per $C_a=1, 0.1$ e 0.01 pF risulta $R'(f_0)/R_p(f_0) = 0.235, 17.65$ e 1711.66 ed in corrispondenza l'errore risulta uguale all' 89,95%, 10,62% e 0,17%. Per ridurre l'errore è sempre possibile applicare la (11) considerando l'ipotesi semplificativa $R_p(f_0')=R_p(f_0)$.

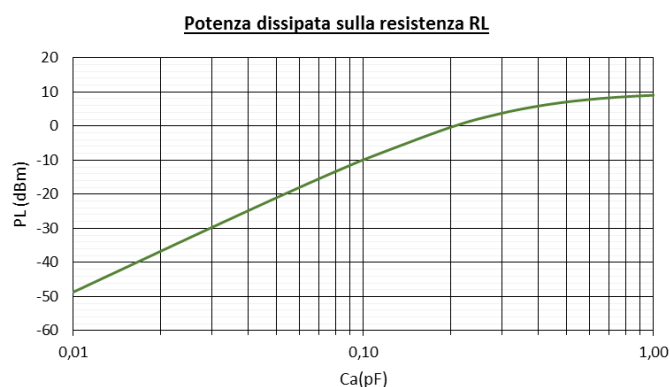


Fig.12 – Andamento della potenza P_L inviata al bolometro al variare della capacità C_a .

La potenza inviata al bolometro diminuisce al diminuire di C_a . Una testina bolometrica comune non può essere utilmente impiegata per misure di questo tipo per potenze inferiori a -15dBm, questo significa che nel caso dell'esempio numerico la capacità C_a non può essere scelta minore di 0,07pF. Con questo valore di capacità l'errore percentuale che teoricamente si commette sulla frequenza di risonanza è minore dell'1%, mentre quello sul fattore di bontà si aggira intorno al 5%.

In **Fig.13** è riportato un grafico che mostra l'andamento dell'errore percentuale residuo che si ha, sempre nel caso dell'esempio numerico, utilizzando la (11) con l'approssimazione $R_p(f_0')=R_p(f_0)$. Confrontando questo grafico con quello di **Fig.11**, si nota come la (11) seppure in forma approssimata consenta una sensibile riduzione dell'errore sistematico commesso.

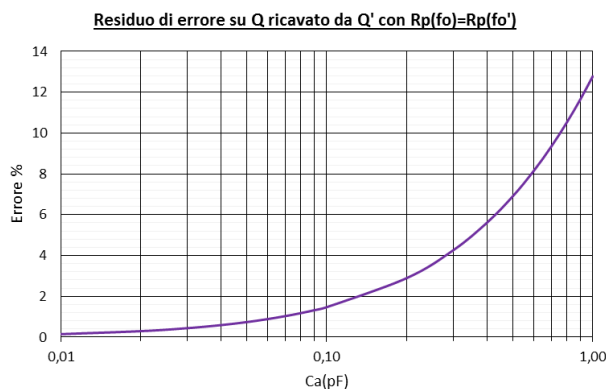


Fig.13 – Andamento dell'errore percentuale residuo utilizzando la (6) per ricavare Q considerando $R_p(f_0')=R_p(f_0)$, al variare della capacità C_a .

Per finire è interessante confrontare la risposta in frequenza che otterremmo con il set-up di misura ideale di **Fig.4** e quella che otterremmo con il set-up di misura relativo al metodo analizzato, il cui schema è rappresentato in **Fig.6**.

In particolare, in **Fig.14** è mostrata la risposta in frequenza che otterremmo con il set-up di misura ideale alimentando il circuito risonante dell'esempio numerico con un generatore di corrente che eroga 1mA. Alla risonanza ai capi del circuito risonante si sviluppa una tensione abbastanza elevata, di poco inferiore a 180V,

a fronte di una corrente uguale ad 1mA. Un altro aspetto è la forma della curva che appare simmetrica rispetto alla frequenza di risonanza.

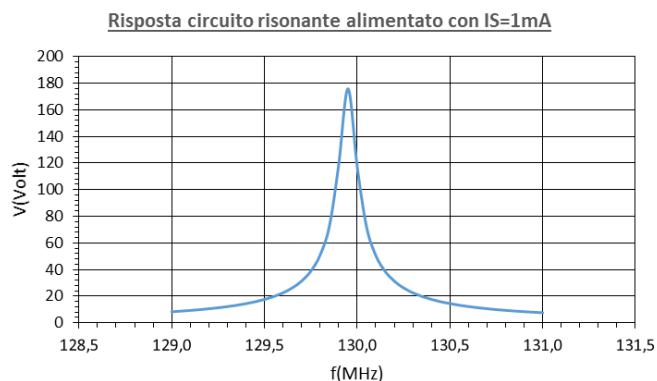


Fig.14 – Risposta in frequenza del circuito risonante preso in considerazione nell'ipotesi di impiegare il set-up di misura ideale di **Fig.4**. Corrente di alimentazione $I_S=1\text{mA}$.

In **Fig.15** è rappresentata la stessa risposta in una banda stretta attorno alla frequenza di risonanza f_0 che vale 129,95MHz. Nella stessa figura sono indicate le frequenze f_1 e f_2 corrispondenti ad una tensione ridotta di $\sqrt{2}$ della tensione alla risonanza e quindi ad una potenza ridotta alla metà o di 3dB. La differenza f_2-f_1 rappresenta la banda a 3dB del circuito risonante. Nel nostro caso dal grafico si legge $f_1 = 129,904\text{MHz}$ e $f_2 = 129,998\text{MHz}$, per cui $B_{3dB} = 90,4\text{KHz}$.

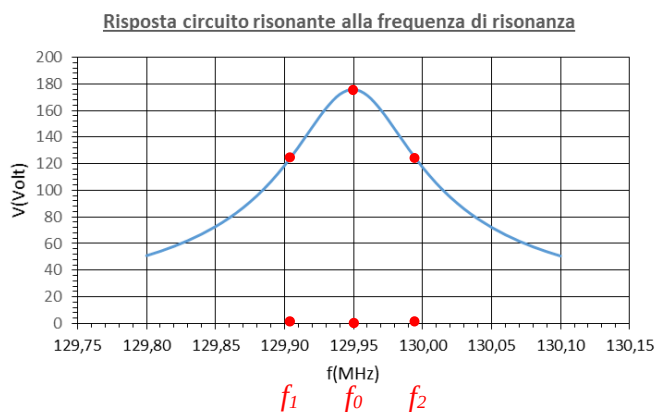


Fig.15 – Risposta di **Fig.14** nell'intorno della frequenza di risonanza.

In **Fig.16** è mostrata l'andamento al variare della frequenza della potenza dissipata dalla resistenza R_L dello schema di **Fig.6** che rappresenta, nel nostro caso, l'impedenza d'ingresso del sensore del bolometro.

Le tre curve sono relative a tre valori diversi della capacità C_a : 0,1, 0,5 e 1pF. I valori della potenza indicati sono relativi ad una potenza disponibile dal generatore del segnale uguale a +10dBm. Come si vede dalle curve, al diminuire di C_a la risonanza si sposta sempre più verso la frequenza di risonanza del circuito sotto misura e la potenza fornita alla risonanza allo strumento di misura (rappresentato da R_L) decresce, secondo il grafico di **Fig.12**.

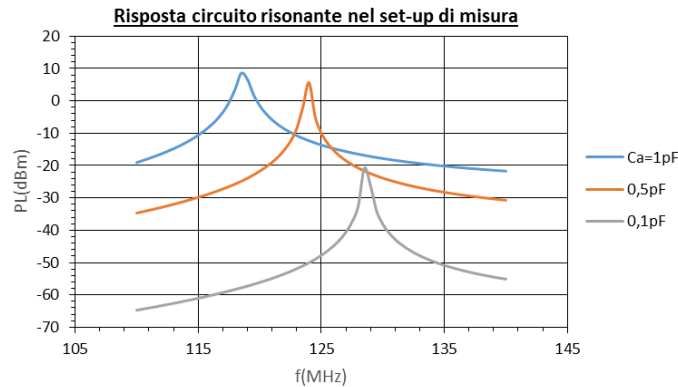


Fig.16 – Risposta in frequenza dello stesso circuito risonante nell’ipotesi di impiegare un set-up di misura come quello di **Fig.6**, per tre diversi valori della capacità C_a : 0,1, 0,5 e 1pF. Potenza disponibile dal generatore di segnale $P_{avs}=10dBm$.

Nell’ultima figura è rappresentata la risposta di **Fig.16** per $C_a=0,5pF$ in una banda stretta attorno alla frequenza di risonanza. La frequenza di risonanza f_0 risulta 123,904MHz, le frequenze f_1 e f_2 che definiscono la banda a 3dB risultano rispettivamente 123,752MHz e 124,060MHz, per cui $B_{3dB}= 308KHz$.

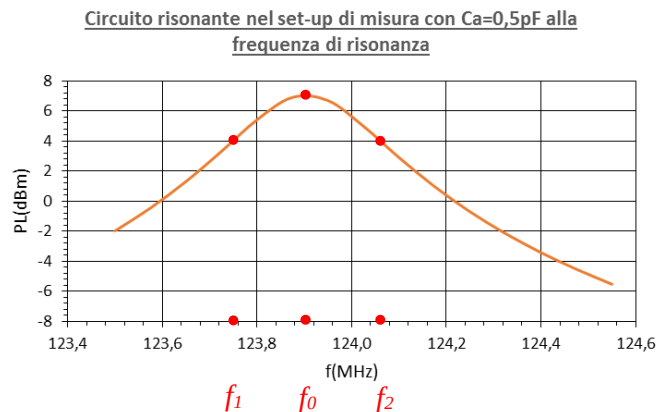


Fig.17 – Risposta di **Fig.16** per $C_a=0,5pF$ nell’intorno della frequenza di risonanza.

3. Conclusioni.

Nella presente nota è stato analizzato un metodo di misura per la caratterizzazione dei circuiti risonanti parallelo fra i più impiegati alle alte frequenze. In sintesi, il metodo consiste nell’accoppiare il circuito sotto misura agli strumenti del banco di misura, costituiti da un generatore di segnale con impedenza d’uscita uguale a 50Ω e da un misuratore di livello con impedenza d’ingresso uguale a 50Ω , mediante due capacità C_a di piccolo valore.

Il metodo è affetto da errori sistematici legati al set-up di misura ed in particolare alla presenza delle capacità C_a . Gli errori riguardano la frequenza di risonanza f_0 e, in modo più sensibile, il fattore di bontà Q .

Dall’analisi del circuito risonante parallelo complessivo, costituito dal circuito risonante sotto misura più gli equivalenti parallelo degli elementi circuitali aggiunti dal set-up di misura, è immediato concludere che i due errori sistematici si possono ridurre riducendo il valore della capacità C_a .

Nella nota sono riportate le formule trovate per la correzione dei due errori e che consentono di risalire dai valori della frequenza di risonanza f_0' e del fattore di bontà Q' del circuito risonante complessivo ai valori della frequenza di risonanza f_0 e del fattore di bontà Q del circuito sotto misura.

Non è stato considerato, perché ritenuto trascurabile, un errore, insito nella metodologia di misura, legato alla ricerca delle condizioni di risonanza. In realtà non è esatto che al massimo del segnale che arriva al misuratore di livello corrisponda la condizione di risonanza del circuito. Come si vede dal circuito di **Fig.8** e dal diagramma vettoriale di **Fig.9** la corrente I che interessa lo strumento è data dalla somma $I_{C_a}' + I_R'$, le due condizioni di massimo segnale e di risonanza coinciderebbero se la corrente I_R' fosse nulla. In queste condizioni avremmo $I = I_{C_a}'$, proporzionale alla corrente che interessa la capacità C equivalente a tutte le capacità presenti, poste in parallelo, e quindi massima alla risonanza, come massima, alla risonanza, è la corrente in C . Anche questo errore si può ridurre riducendo il valore della capacità C_a .

Per una maggior confidenza sui valori possibili delle grandezze in gioco, nella seconda parte della nota è riportato un esempio numerico. Partendo dai dati costruttivi di un circuito RLC parallelo risonante ad una frequenza f_0 di circa 130MHz (appartenente banda delle VHF) sono stati calcolati i valori delle grandezze elettriche che interessano il circuito di **Fig.8** e la potenza che arriva al misuratore di livello alla risonanza nel caso di un set-up di misura composto da un generatore ed un misuratore di livello con impedenza d'uscita e d'ingresso uguali a 50Ω ed accoppiati al circuito risonante di partenza con due capacità $C_a = 0,5\text{pF}$.

Dopodiché è stata ricavata una serie di grafici che forniscono l'andamento degli errori sistematici su f_0 e Q ed il livello di segnale all'ingresso dello strumento di misura. I grafici confermano come sia possibile ridurre gli errori sistematici scegliendo per C_a il valore più piccolo possibile, che comunque deve essere compatibile con la sensibilità dello strumento per la misura di livello prescelto.

Un grafico successivo mostra l'errore residuo nel caso in cui, per superare le difficoltà che si possono incontrare nel determinare la resistenza $R_p(f_0)$ si applichi al circuito considerato la formula (11) per la correzione del Q con $R_p(f_0) = R_p(f_0')$.

Nell'ultima serie di grafici è rappresentata la risposta in frequenza del circuito che si otterrebbe con il set-up di misura ideale di **Fig.4** e la risposta in frequenza che si otterrebbe con il set-up di misura di **Fig.8** per tre valori della capacità C_a di accoppiamento: 0,1 , 0,5 e 1pF.

Un vantaggio del metodo analizzato è quello di non richiedere la necessità di accedere al circuito risonante sotto misura, come potrebbe essere nel caso si intendesse sfruttare un accoppiamento mediante link induttivo con l'induttanza del circuito sotto misura. Questo fa sì che con questo metodo si possano caratterizzare le risonanze di circuiti assemblati nel loro housing, direttamente dai terminali di accesso, risonanze che, alle alte frequenze, possono risentire non poco dell'housing stesso.

4. Riferimenti.

[1] ARRL Handbook for Radio Communications, 2012 Edition

[2] Chapter 2, para 2.3.9 di [1]

[3] Chapter 5, para 5.3.4 di [1]

iz5tek